Soluciones
Olimpíada matemática DEPR-CRAIM
16 de abril de 2010

1. Racionalice el denominador de la fracción

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

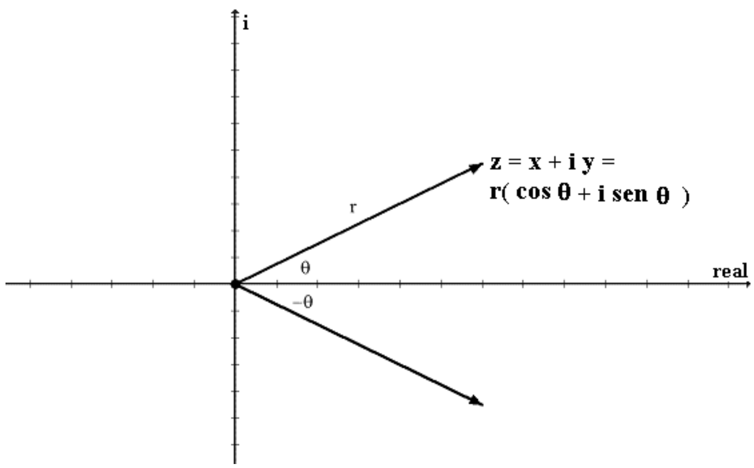
Escriba la respuesta en la forma más simple.
Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} \\
&= \frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2+2\sqrt{6}+3-5} \\
&= \frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{36}+\sqrt{60}}{12} \\
&= \frac{2\sqrt{6}+6+2\sqrt{15}}{12} \\
&= \frac{\sqrt{6}+3+\sqrt{15}}{6} \\
&= \frac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{6}
\end{aligned}$$

2. Un número complejo $z \neq 0$ se escribe en forma polar cuando se expresa de la forma $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ donde $r > 0$ y θ es un ángulo medido en radianes. En tal caso, también escribimos $z = r\angle\theta$. Si $\bar{z}$ representa el conjugado del número complejo z, demuestre:

$$\begin{aligned}\overline{r\angle\theta} &= r\angle -\theta \\ &= r\angle 2\pi - \theta.\end{aligned}$$

Solución:
Note que



$$\begin{aligned}\overline{r\angle\theta} &= \overline{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} \\ &= r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) \\ &= r(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)) \\ &= r\angle -\theta.\end{aligned}$$

Además, como $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(2\pi - \theta) = -\operatorname{sen}\theta$, el resto está claro.

3. Suponga que r_1 y r_2 son dos ceros reales del polinomio $P(x) = ax^2+bx+c$, donde a, b, c son números reales con $a > 0$. Exprese $|r_1 - r_2|$ en términos de los coeficientes a, b, c.
Solución:

$$
\begin{aligned}
(r_1 - r_2)^2 &= r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 \\
&= (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) - 4r_1r_2 \\
&= (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 \\
&= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) \\
&= \frac{b^2 - 4ac}{a^2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$|r_1 - r_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}.$$

4. Considere la función

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

donde a, b, c, d son números reales. Hallar condiciones necesarias y suficientes relativas a los coeficientes a, b, c, d para que $f = f^{-1}$.
Solución:
Calculamos la función inversa:

$$\begin{aligned} y = \frac{ax+b}{cx+d} &\Rightarrow x = \frac{ay+b}{cy+d} \\ &\Rightarrow x(cy+d) = ay+b \\ &\Rightarrow cxy + xd = ay + b \\ &\Rightarrow y(cx-a) = -xd + b \\ &\Rightarrow y = \frac{-dx+b}{cx-a} \\ &\Rightarrow f^{=1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} \end{aligned}$$

Por lo tanto $f = f^{-1}$, si y sólo si $f(x) = f^{-1}(x)$ para toda x en el dominio común de f y f^{-1}, si y sólo si $d = -a$, si y sólo si $a + d = 0$.

5. Describa geométricamente en el plano complejo el conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+1| < |z-1|\}.$$

Solución 1:
Note que

$$\begin{aligned} |z+1| < |z-1| &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} < \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2 < (x-1)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1 < x^2-2x+1 \\ &\Leftrightarrow 2x < -2x \\ &\Leftrightarrow 4x < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z < 0\}$

Solución 2:
Note que para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z+1| = |z-1|$ si y sólo si la distancia en el plano de z a -1 es la misma que la de z a 1, y esto ocurre si y sólo si z queda en la bisectriz perpendicular del segmento desde -1 a 1 en el plano, es decir, en el eje imaginario. Entonces $|z+1| < |z-1|$ si y sólo si z queda a la izquierda del eje de imaginario, es decir, si y sólo si $\operatorname{Re} z < 0$.

6. El número $27,931$ es el producto de tres factores primos que están aproximadamente en razón $1:2:3$. Halle los tres factores primos.
   Solución:
   Suponga que a es el primer primo de modo que tenemos que los factores estarían en razón aproximada de $a:2a:3a$. Por lo tanto $27,931$ es aproximadamente $6a^3$, de suerte que a^3 es aproximadamente $27,931/6$ que es aproximadamente 4655. Si $a = 17$, entonces $a^3 = 4913$. En este caso, tendríamos $2a \approx 34$ de modo que podríamos tomar como segundo factor un primo cercano, como 31. Note que $27931 = 31(901)$, de modo que el número dado es divisible por 31. En tal caso $3a \approx 51$. Tomando a un primo cercano, como 53, y constando que 53 divide a 901, vemos que los factores son 17, 31 y 53.
   Nota: La respuesta más común es $17, 37, 53$ (¡incorrecta!)

7. Resuelva la siguiente congruencia:

$$x^2 - 2x + 2 \equiv 0 \pmod 5$$

Solución:
En lo que sigue todas las congruencias son módulo 5:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 \equiv 0 &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \equiv -1 \\ &\Rightarrow (x-1)^2 \equiv -1. \end{aligned}$$

Como $-1 \equiv 4 \pmod 5$, vemos

$$(x-1)^2 \equiv 2^2 \pmod 5$$

Como 5 es primo, vemos que $x - 1 \equiv 2 \pmod 5$ o $x - 1 \equiv -2 \pmod 5$, es decir $x \equiv 3 \pmod 5$ o $x \equiv -1 \pmod 5$. Por lo tanto las soluciones son $x \equiv 3 \pmod 5$ o $x \equiv 4 \pmod 5$.

8. Halle la media aritmética del conjunto de todos los divisores positivos de 1800.

Solución:

La factorización prima de 1800 es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Es fácil ver que si p es un número primo y n es un entero positivo, entonces el número de divisores de p^n es $n+1$. Además la suma de los divisores de p^n es

$$1 + p + p^2 + \cdots p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}.$$

En nuestro caso, el número de divisores es $(3+1)(2+1)(2+1) = 4(3)(3) = 36$, mientras que la suma de los divisores es

$$\begin{aligned} \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} &= (15)(13)(31) \\ &= 6045. \end{aligned}$$

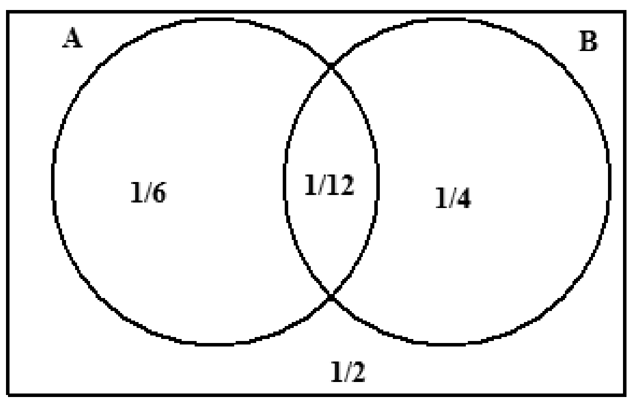
Por lo tanto, el promedio deseado es

$$\frac{6045}{36} \approx 167.92.$$

9. Considere dos eventos independientes A y B tal que $P(A) = 1/4$ y $P(B) = 1/3$. Halle $P(A \cup B^c)$; aquí B^c denota el complemento del conjunto B.
Solución 1:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) \\ &= P(A) + (1 - P(B)) - (P(A) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Solución 2: Por la figura:



$$P(A \cup B^c = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

10. Recuerde que $\lfloor x \rfloor$ es el entero mayor n tal que $n \leq x$. Note que si $n = \lfloor x \rfloor$, entonces $n \leq x < n + 1$.
Resuelva la ecuación

$$2\lfloor x \rfloor^2 + 5\lfloor x \rfloor - 3 = 0.$$

Solución:
Tome $t = \lfloor x \rfloor$ y escriba la ecuación dada como $2t^2 + 5t - 3 = 0$, es decir, $(2t - 1)(t + 3) = 0$. Por lo tanto, $t = 1/2$ o $t = -3$. Descartando $t = 1/2$, vemos que $\lfloor x \rfloor = t = -3$. Esto ocurre si y sólo si $x \in [-3, -2)$.